بسم الله الرحمن الرحيم

مراجعة الباب: الأول - الثاني /

رياضيات (5)

إعداد الأستاذ/

وحيد الزيادي

تنسيق الطالب/

عبد الله عمر

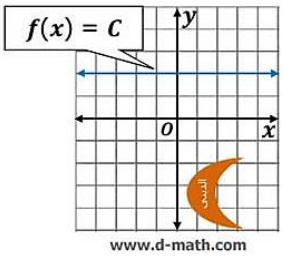
(AbdullahOmar@outlook.com)

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية :-

س1| اكتب الصورة العامة للدوال الرئيسة (الأم)، وحدد في كل مرة: المجال – المدى – الاتصال – فترات التزايد والتناقص .

جـ1|

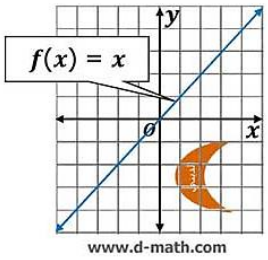
1) الدالة الثابتة: $f(x) = c$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية، ومداها $\{ C \}$.
* يقطع المنحنى محور y عند النقطة $(C , 0)$، وإذا كان $C = 0$ فيقطع المنحنى المحور x عند عدد لا نهائي من النقاط.
* المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فهي دالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$
* المنحنى ثابت في الفترة $(-\infty , \infty)$

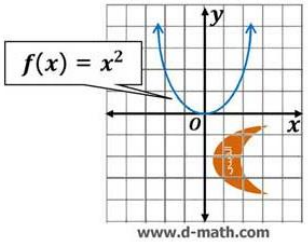
2) الدالة المحايدة: $f(x) = x$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \in R \}$،
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0 , 0)$.
* المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فهي دالة فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
* المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty , \infty)$

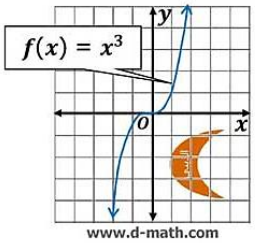
3) الدالة التربيعية: $f(x) = x^2$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \geq 0 , y \in R \}$،
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0 , 0)$.
* المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فهي دالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
* المنحنى متناقص على الفترة $(0 , -\infty)$، ومتزايد على الفترة $(0 , \infty)$.

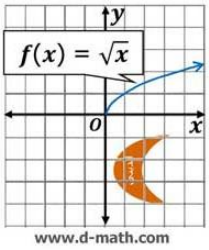
4) الدالة التكعيبية: $f(x) = x^3$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \in R \}$،
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0 , 0)$.
* المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فهي دالة فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
* المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty , \infty)$

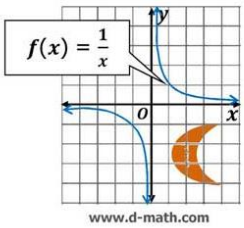
5) دالة الجذر التربيعي: $f(x) = \sqrt{x}$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة (∞ , 0]، ومداها (∞ , 0].
* للمنحنى مقطع واحد عند النقطة (0 , 0).
* المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* يبدأ المنحنى عند x =0 وتكون $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
* المنحنى متزايد في الفترة (∞ , 0).

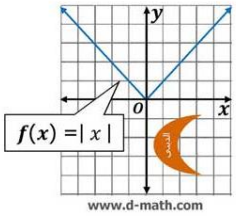
6) دالة المقلوب: $f(x) = \frac{1}{x}$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة $\{x | x \neq 0, x \in R\}$، ومداها $\{y | y \neq 0, y \in R\}$.
* المنحنى لا يقطع أياً من المحورين.
* منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية.
* للدالة عدم اتصال لا نهائي عند x = 0.
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
* الدالة متناقصة في الفترة (∞ , 0) ، (0, ∞-)

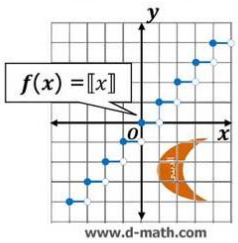
7) دالة القيمة المطلقة: $f(x) = |x|$



خصائص الدالة:

* مجال الدالة $\{x | x \in R\}$، ومداها $\{y | y \geq 0 , y \in R\}$.
* للمنحنى مقطع واحد عند (0 , 0).
* منحنى الدالة متماثل حول y؛ لذا فالدالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* يبدأ المنحنى عند x=0 . وينتهي بـ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.
* المنحنى متناقص في الفترة (0, ∞-)، ومتزايد في الفترة (∞ , 0).

8) الدالة الدرجية (دالة أكبر عدد صحيح)



خصائص الدالة:

* مجال الدالة $\{x | x \in R\}$، ومداها $\{y | y \in Z\}$.
* يقطع المنحنى المحور y عند (0 , 0) ويقطع المحور x عند $\{x | 0 \leq x < 1 , x \in R\}$
* لا يوجد لمنحنى الدالة تماثلات، أي أنها ليست فردية وليست زوجية.
* للدالة عدم اتصال قفزي عند $\{x | x \in Z\}$
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
* الدالة ثابتة عند $\{x | x \notin Z\}$. متزايدة عند $\{x | x \in Z\}$.

سـ2| لكل مما يلي:-

1) اكتب الصورة العامة للدالة الرئيسة (الأم).

2) ارسم الدالة (الأم) والدالة المعطاة.

3) صف نوع التحويل الحاصل.

a) $g(x) = \sqrt{x} - 2$

* إزاحة وحدتين نحو الأسفل.

b) $g(x) = |x + 2| - 1$

* إزاحة وحدتين إلى اليسار ثم إزاحة وحدة واحدة نحو الأسفل.

c) $g(x) = -x^2 + 1$

انعكاس حول محور x ، ثم إزاحة وحدة واحدة نحو الأعلى.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين :-

سـ3| إذا كانت $g(x) = x + 3$ وَ $f(x) = x^2$ ، أوجد الدوال الآتية، وحدد المجال في كل مرة.

a) $f + g(x)$

$$= f(x) + g(x) \rightarrow (x^2) + (x + 3) = x^2 + x + 3$$

b) $f - g(x)$

$$= f(x) - g(x) \rightarrow (x^2) - (x + 3) = x^2 - x - 3$$

c) $f \cdot g(x)$

$$= f(x) \cdot g(x) \rightarrow (x^2)(x + 3) = x^3 + 3x^2$$

d) $f/g(x)$

$$= f(x)/g(x) \rightarrow (x^2)/(x + 3) = \frac{x^2}{x + 3}$$

العلاقات والدوال العكسية :-

سـ4| ارسم الدوال الآتية بيانياً، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت لها دالة عكسية أم لا .

(a $f(x) = \sqrt{x} - 2$

∴ من خلال التمثيل البياني واختبار الخط الأفقي، فإنه يوجد لهذه الدالة دالة عكسية $f^{-1}(x)$.

(b $g(x) = x^2 + 3$

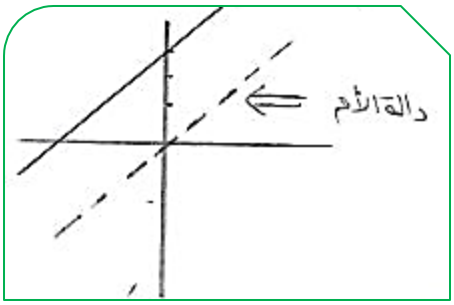
∴ من خلال التمثيل البياني واختبار الخط الأفقي، فإنه **لا يوجد** لهذه الدالة دالة عكسية $f^{-1}(x)$.

(c $h(x) = |x - 2|$

∴ من خلال التمثيل البياني واختبار الخط الأفقي، فإنه **لا يوجد** لهذه الدالة دالة عكسية $f^{-1}(x)$.

س5| أوجد جبرياً الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ لما يلي إن وجدت .

(a $f(x) = x + 3$

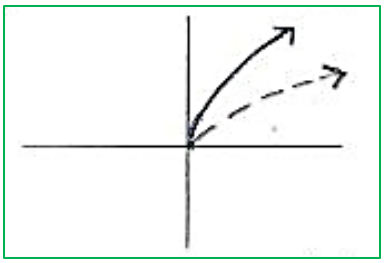


∴ من خلال التمثيل البياني واختبار الخط الأفقي، فإنه **يوجد** لهذه الدالة دالة عكسية $f^{-1}(x)$.

إيجاد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$:-

$$f(x) = x + 3$$
$$y = x + 3$$
$$x = y - 3$$
$$f^{-1}(x) = x - 3$$

b) $f(x) = 2\sqrt{x}$



∴ من خلال التمثيل البياني واختبار الخط الأفقي، فإنه **يوجد** لهذه الدالة دالة عكسية $f^{-1}(x)$.

إيجاد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$:-

$$f(x) = 2\sqrt{x}$$
$$y = 2\sqrt{x}$$
$$\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{y}}{2}$$
$$(\frac{x}{2})^2 = y$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x^2}{4}$$

س6| تحقق من تركيب الدالتين الآتيتين أن كل كلاً منها عكسية للأخرى.

a) $f(x) = x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-2}$

$$f[g(x)] = f(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = (x-2) + 2 = x$$

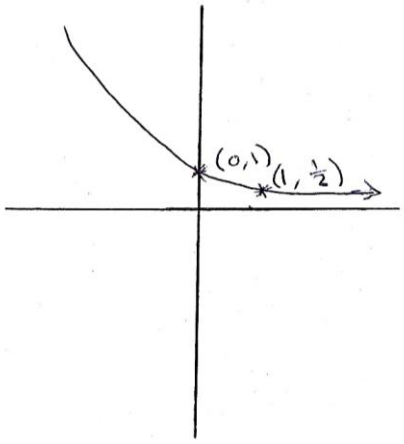
$$g[f(x)] = g(x^2+2) = \sqrt{(x^2+2)-2} = x\sqrt{2-2} = x$$

∴ بما أن $f[g(x)]$ وَ $g[f(x)]$ يساويان x إذاً فكلاً من الدالتين عكسية للأخرى.

سـ7| صنف الدوال الأسية الآتية ومثلها بيانياً :

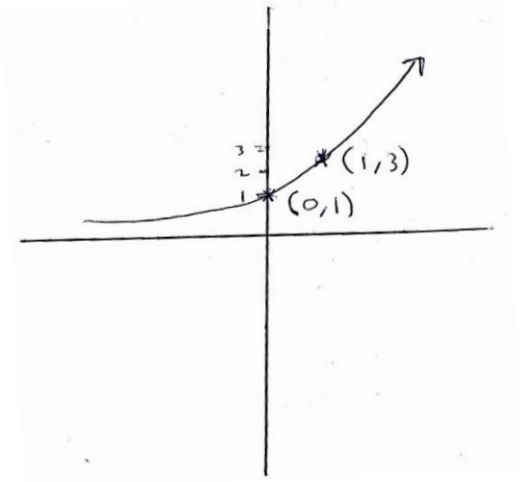
(a $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

∴ دالة اضمحلال.



(b $f(x) = 3^x$

∴ دالة نمو أسي.



(c $f(x) = 2^x + 3$

∴ دالة نمو أسي.

حل المعادلات والمتباينات الأسية :-

س8| أوجد حل كل معادلة مما يلي:

(a $3^{2x+1} = 9^{x-5}$

$$3^{2x+1} = 3^{2(x-5)}$$
$$3^{2x+1} = 3^{2x-10}$$
$$2x + 1 = x - 10$$
$$2x - x = -10 - 1$$
$$x = -11$$

(b $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 4^{2x}$

$$(2)^{-1(x+3)} = 2^{2(2x)}$$
$$(2)^{-x-3} = 2^{4x}$$
$$-x - 3 = 4x$$
$$-3 = 4x + x$$
$$\frac{-3}{5} = x$$

(c $3^{3x+1} < 9^{x-5}$

$$3^{3x+1} < 9^{x-5}$$
$$3^{3x+1} < 3^{2(x-5)}$$
$$3x + 1 < 2(x - 5)$$

$$3x + 1 < 2x - 10$$
$$3x - 2x < -10 - 1$$
$$x < -11$$

الحل: $(-\infty, -11)$

(d $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 4^{2x}$

$$(2)^{-1(x+3)} \geq 2^{2(2x)}$$
$$-1(x + 3) \geq 2(2x)$$
$$-x - 3 \geq 4x$$
$$-3 \geq 5x$$
$$\frac{-3}{5} \geq x$$

الحل: $(-\infty, -0.6]$

اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية :-

سـ9| اكتب ما يلي بصورة لوغاريتمية أو أسية:

(a $7^2 = 49$

$$\log_7 49 = 2$$

(b $\log_3 9 = 2$

$$3^2 = 9$$

سـ10| أوجد قيمة ما يلي بدون استخدام الآلة:

(a $\log_5 1 =$

$$5^x = 1 \rightarrow 5^x = 5^0 \rightarrow x = 0$$
$$\log_5 1 = 0$$

(b $\log_3 81 =$

$3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

$\log_3 81 = 4$

(c $8^{\log_8 2} =$

$b^{\log_b x} = x \rightarrow 8^{\log_8 2} = 2$

(d $\log_3 36 =$

خصائص اللوغاريتمات :-

سـ11| مستخدماً خصائص اللوغاريتمات، أوجد ناتج ما يلي:

(a $\log_8 64 =$

$\log_8 8^2 = 2$

(b $\log_{10} 25 + \log_{10} 4 =$

$\log_{10}(25)(4) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

(c $\log_2 8 - \log_2 4 =$

$\log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2 = 1$

سـ12| استعمل اللوغاريتمات التالية: $\log_4 3 \approx 0.79$ وَ $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ لإيجاد ما يلي:

(a $\log_4 9 \approx$

$$\log_4 9 = \log_4 (3)^2 = 2\log_4 3 \rightarrow 2(0.79) = 1.58$$

(b $\log_4 8 \approx$

$$\log_4 8 = \log_4 2^3 = 3\log_4 2 \rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

سـ13| اكتب العبارة التالية بصورة مطولة:

(a $\log_2 6a^3bc^4$

$$= \log_2 6 + \log_2 a^3 + \log_2 b + \log_2 c^4$$
$$= \log_2 6 + 3\log_2 a + \log_2 b + 4\log_2 c$$

سـ14| اكتب العبارة التالية بصورة مختصرة:

(a $-5\log_2 x + 3\log_2 2x$

$$= \log_2 x^{-5} + \log_2 2x^3$$
$$= \log_2 (x^{-5})\,(2x^3)$$

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمات :-

سـ15| حل المعادلات التالية:

(a $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

$$16^{\frac{5}{2}} = x$$
$$4^{2\left(\frac{5}{2}\right)} = x$$
$$4^5 = x$$
$$x = 1024$$

(b $\log_3 2x - 1 = \log_3 x + 2$

$$2x - 1 = x + 2$$
$$2x - x = 2 + 1$$
$$x = 3$$

(c $2\log_3 x - \log_3 x + 2 = 0$

$$\log_3 x^2 - \log_3 x + 2 = 0$$
$$\log_3 x^2 = \log_3 x + 2$$
$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -2 \ , \ x = 1$$

∴ بما أنه يُستثنى كل حل يجعل اللوغاريتم سالباً، فإن حل هذه المعادلة هو: $x = 1$ فقط.

(d $\log_2 2x + 1 \leq \log_2 x + 4$

$$2x + 1 \leq x + 4$$
$$2x - x \leq 4 - 1$$
$$x \leq 3$$

الحل: $(-\infty, 3]$

اللوغاريتمات العشرية :-

سـ16| مستخدماً اللوغاريتمات العشرية، أوجد حل ما يلي:

(a $3^x = 15$

$$\log 3^x = 15$$
$$x \log 3 = \log 15$$

$$\frac{x \log 3}{\log 3} = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x = 2.46$$

(b $6^x = 42$

$$\log 6^x = 42$$
$$x \log 6 = \log 42$$

$$\frac{x \log 6}{\log 6} = \frac{\log 42}{\log 6}$$

$$x = 2.08$$