بسم الله الرحمن الرحيم

مراجعة الباب: الثالث - الرابع [مع الحلول] /

رياضيات (5)

إعداد الأستاذ/

وحيد الزيادي

تنسيق الطالب/

عبد الله عمر

(AbdullahOmar@outlook.com)

المتطابقات المثلثية :-

المتطابقات المثلثية الأساسية

هناك خمسة أنواع للمتطابقات المثلثية هي:

❶	المتطابقات النسبية (المقام لا يساوي صفر)		
	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
❷	متطابقات المقلوب (المقام لا يساوي صفر)		
	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
❸	متطابقات فيثاغورس		
	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
❹	متطابقات الزاويتين المتتامتين		
	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$
❺	متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية		
	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

س1| أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ ، إذا علمت أن $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، حيث أن الزاوية تقع في الربع الرابع :

∴ بما أن قيمة الـ $\sin\theta$ في الربع الرابع سالبة؛ فإنه يُستثنى من الحل القيم الموجبة.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$
$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

سـ2| أوجد القيمة الدقيقة لـ $sec\theta$ ، إذا علمت أن $sin\theta = \frac{-2}{7}$ ، حيث أن الزاوية تقع في الربع الثالث :-

أولاً| إيجاد الـ $cos\ \theta$:

$$cos^2\ \theta + sin^2\ \theta = 1$$

$$cos^2\ \theta = 1 - sin^2\ \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-2}{7}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{49}\right)$$

$$= \frac{45}{49}$$

$$cos\ \theta = \pm\frac{\sqrt{45}}{7} \rightarrow cos\ \theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

ثانياً| إيجاد الـ $sec\ \theta$:

$$sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{-3\sqrt{5}}{7}}$$

$$= \frac{-7}{3\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{7\sqrt{5}}{15}$$

س3| بسط العبارتين التاليتين:

a) $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\cot\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta}$$

$$= \tan\theta$$

b) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

$$= \frac{1}{sin^2\theta} - \frac{1}{tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{sin^2\theta} - \frac{1}{\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{sin^2\theta} - \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}$$

$$= \frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} = 1$$

إثبات صحة المتطابقات المثلثية:-

سـ4| أثبت صحة المتطابقات التالية:

a) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$

$$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right)$$

$$= \cos^2\theta\,(\csc^2\theta - 1)$$

$$= \cos^2\theta\cot^2\theta$$

b) $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \cot^2\theta$

$$= \frac{\cos\theta\dfrac{1}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \div \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما:

متطابقات المجموع

$$sin(A+B) = sinA\,cosB + cosA\,sinB \quad ❶$$
$$cos(A+B) = cosA\,cosB - sinA\,sinB \quad ❷$$
$$tan(A+B) = \frac{tanA + tanB}{1 - tanA\,tanB} \quad ❸$$

متطابقات الفرق

$$sin(A-B) = sinA\,cosB - cosA\,sinB \quad ❶$$
$$cos(A-B) = cosA\,cosB + sinA\,sinB \quad ❷$$
$$tan(A-B) = \frac{tanA - tanB}{1 + tanA\,tanB} \quad ❸$$

سـ5| أوجد القيمة الدقيقة لما يلي:

a) $\sin(15)° = \sin(45° - 30°)$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos(-15)° = \cos(30° - 45°)$

$$= \cos 30 \cos 45 + \sin 30 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) $\sin(135)° = \sin(90 + 45)$

$$= \sin 90 \cos 45 + \cos 90 \sin 45$$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها:-

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad ❶$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad ❷$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ❸$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\ ,\ \cos\theta \neq -1 \quad ❶$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad ❷$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad ❸$$

س6| إذا علمت أن $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، وَ $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فأوجد :

a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= 4\frac{\sqrt{5}}{9}$$

b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{9}$$

س7| أوجد القيمة الدقيقة لما يلي :

a) $\sin 120° = \sin(180 - 120)$

$$= \sin 60$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\cos 120° = -\cos(180 - 120)$

$$= -\cos 60$$

$$= -\frac{1}{2}$$

حل المعادلات المثلثية:-

س8| حل المعادلات المثلثية التالية:

a) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

$$4\sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$$

b) $2\cos^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

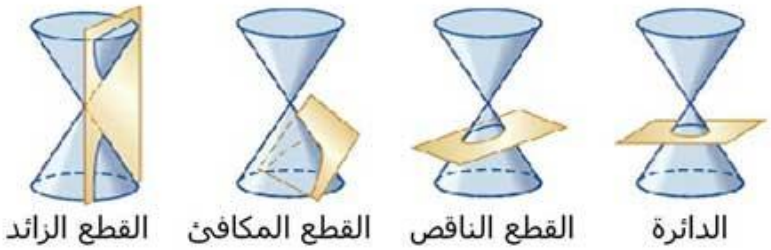
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

القطوع المخروطية:-

س9| حدد أنواع القطوع المخروطية واكتب الصورة القياسية لكل نوع:

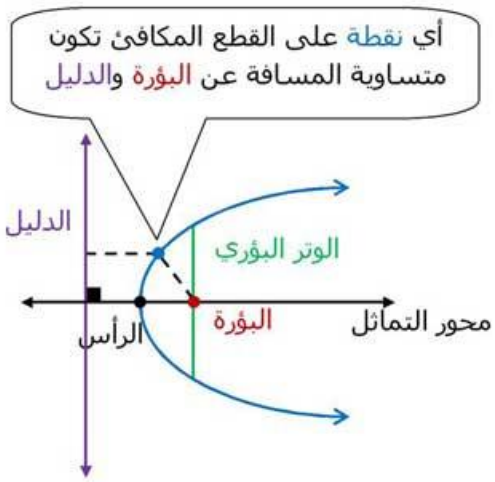
أنواع القطوع المخروطية:



أولاً | القطع المكافئ :

القطع المكافئ

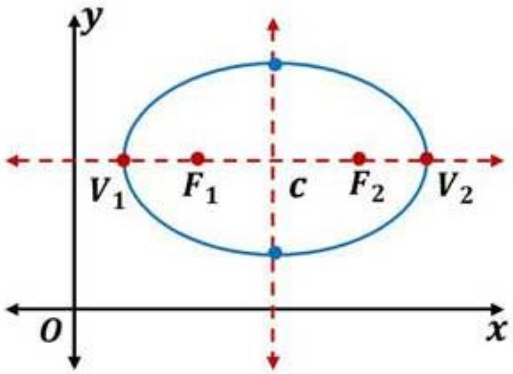
هو قطع مخروطي يمثل المحل الهندسي لنقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة مساوياً لبعدها عن مستقيم ثابت يسمى الدليل.



معادلة القطع: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

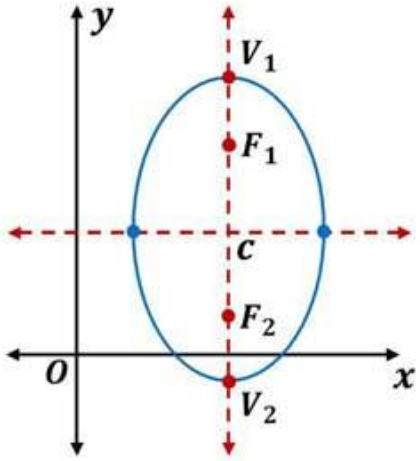
ثانياً | القطع الناقص:

عندما يكون المحور الأكبر **أفقياً**:



معادلة القطع: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

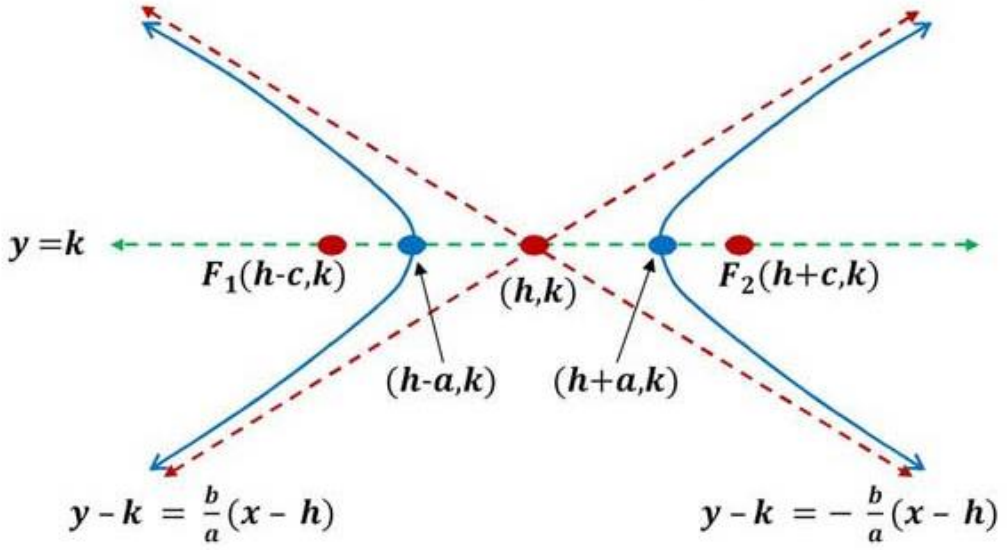
عندما يكون المحور الأكبر **رأسياً**:



معادلة القطع: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

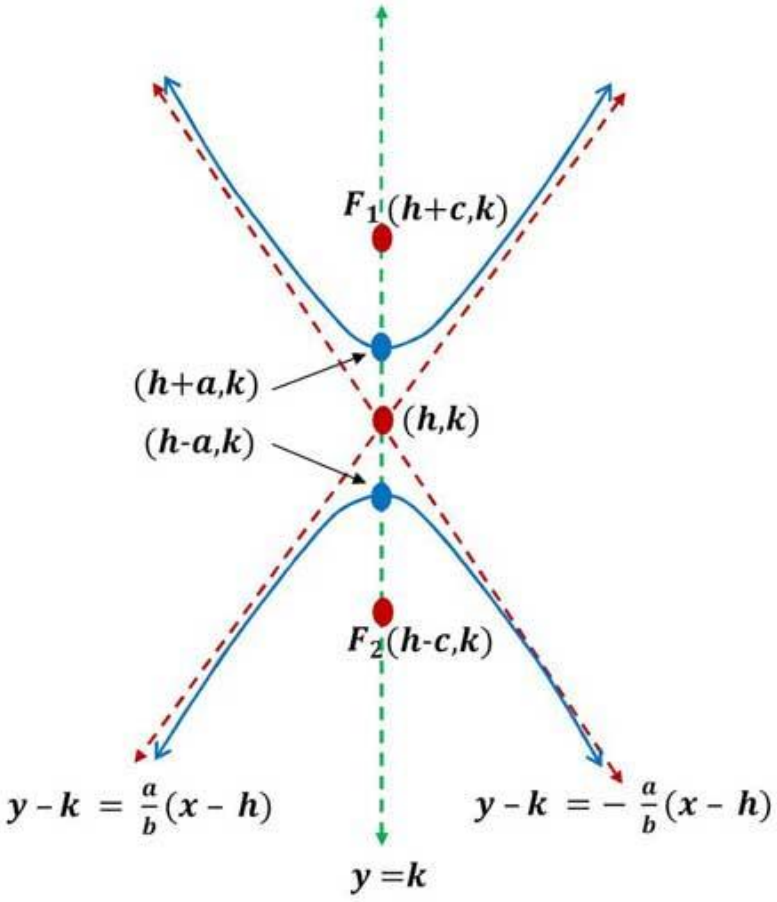
ثالثاً | القطع الزائد :

عندما يكون المحور القاطع **أفقياً**:



معادلة القطع: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

عندما يكون المحور القاطع **رأسيّاً**:



معادلة القطع: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

س10| حدد خصائص كل قطع مما يلي ومثله بيانياً:

a) $(x-a)^2=8(y+3)$

الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأعلى.

الرأس: (3- ,4).

البؤرة: (1- ,4)

معادلة محور التماثل: $x = 4$

معادلة الدليل: $y = -5$

طول الوتر البؤري = 8 .

b) $2(x + 6) = (y + 1)^2$

الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين.

الرأس: (1- ,6-).

البؤرة: (1- ,5.5-).

معادلة محور التماثل: $y = -1$

معادلة الدليل: $x = -6.5$

طول الوتر البؤري = 2

c) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

الاتجاه: أفقي.

المركز: $(1, 4)$.

المحور الأكبر/

* البؤرتان: $(1 \pm 3, 4)$

* الرأسان: $(1 \pm 5, 4)$

* معادلته: $y = 4$.

* طوله: 10 .

المحور الأصغر/

* الرأسان المرافقان: $(1, 4 \pm 4)$

* معادلته: $x = h$

* طوله: 8 .

d) $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$

الاتجاه: رأسي.

المركز: (2-, 3).

* الرأسان: $(3 \pm 4, -2)$

* البؤرتان: $(3 \pm 3, -2)$

* معادلة المحور القاطع: $y = -2$.

* معادلة المحور المرافق: $x = 3$.

سـ11| حدد الاختلاف المركزي للقطوع في فقرتي c وَ d السابقتين في سؤال 10 :

c) $\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6}$

d) $\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{6.40}{4} = 1.6}$

س12| اكتب معادلة كل قطع في كل مما يلي إذا علمت بعض خصائصه:

a) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (2, -5) وبؤرته (-1, -5).

∴ بما أن الإحداثي الثابت هو إحداثي (y) فإن القطع أفقي.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y+5)^2 = 4(-3)(x-2)$$
$$(y+5)^2 = -12(x-2)$$

b) معادلة القطع الناقص الذي رأسه (3, -6) , (3, 2) ومركزه (3, -2) ورأساه المرافقان (5, -2) , (1, -2) وطول محوره الأصغر يساوي 8 .

∴ بما أن الإحداثي الثابت هو إحداثي (x) فإن القطع رأسي.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$